ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:

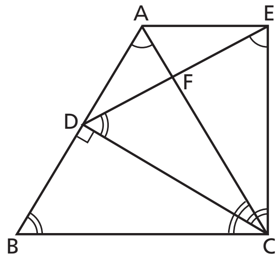
1) EC è perpendicolare a CB;
2) i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
3) EA è parallela a CB;
4) il quadrilatero $AECD$ è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:

1) il seno e il coseno dell'angolo $B\hat{C}D$;
2) le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo EDC.

PROBLEMA 1

a1. Considerato il triangolo acutangolo isoscele ABC (figura 1), con CD altezza condotta per C, si costruisce il triangolo isoscele ECD di base CD, simile al triangolo ABC. Pertanto i triangoli ABC ed ECD hanno gli angoli ordinatamente congruenti.
Nel triangolo rettangolo BCD l'angolo $D\hat{B}C$ è complementare a $B\hat{C}D$. Poiché l'angolo $D\hat{C}E$ è congruente a $D\hat{B}C$ per costruzione, risulta che $D\hat{C}E$ è complementare a $B\hat{C}D$. Pertanto l'angolo $B\hat{C}E$ è retto perché somma di due angoli complementari ed EC è perpendicolare a CB.



▲ **Figura 1.**

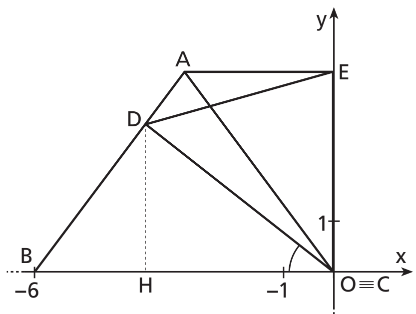
a2. Considerati i triangoli EFC e AFD, essi hanno: $A\hat{F}D \cong E\hat{F}C$ perché angoli opposti al vertice; $D\hat{A}F \cong F\hat{E}C$ per costruzione. I triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine e quindi hanno i lati ordinatamente in proporzione. In particolare risulta: $AF : DF = EF : CF$. Ora, i triangoli EFA e CFD hanno due lati ordinatamente proporzionali e gli angoli compresi $A\hat{F}E$ e $D\hat{F}C$ congruenti perché opposti al vertice. Quindi, per il secondo criterio di similitudine i triangoli EFA e CFD sono simili e, in particolare, $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti.

a3. I triangoli EFA e CFD sono simili per la dimostrazione precedente, quindi $F\hat{A}E$ è congruente a $F\hat{D}C$. Ma $F\hat{D}C \cong B\hat{C}A$ per costruzione, pertanto, per la proprietà transitiva $F\hat{A}E = B\hat{C}A$. Considerati i segmenti EA e CB, essi formano con la trasversale AC angoli alterni interni congruenti e quindi, per il teorema inverso delle rette parallele, i segmenti EA e CB sono paralleli.

a4. Si osservino gli angoli del quadrilatero $AECD$. Poiché EA è parallelo a CB e $B\hat{C}E$ è retto per dimostrazioni precedenti, l'angolo $A\hat{E}C$ è anch'esso retto per il teorema delle rette parallele. L'angolo $A\hat{D}C$ del quadrilatero, opposto a $A\hat{E}C$, è retto per costruzione, pertanto il quadrilatero $AECD$ ha gli angoli opposti $A\hat{E}C$ e $A\hat{D}C$ supplementari. Tenendo conto che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a due angoli piatti, anche i restanti angoli interni e opposti $D\hat{A}E$ e $E\hat{C}D$ del quadrilatero sono supplementari. Per il teorema inverso dei quadrilateri inscritti, il quadrilatero $AECD$ è quindi inscrivibile in una circonferenza.

b1. Si fissa un sistema cartesiano ortogonale centrato nel punto C e tale che il lato BC sia sull'asse negativo delle ascisse (figura 2). Le coordinate dei punti B e C sono quindi: $B(-6; 0)$ e $C(0; 0)$.
Il triangolo BCD è rettangolo per costruzione e sono note le misure del cateto $\overline{CD} = \frac{24}{5}$ e dell'ipotenusa $\overline{BC} = 6$. Quindi il coseno dell'angolo $B\hat{C}D$ si determina applicando il teorema di trigonometria sui triangoli rettangoli:

$$\overline{CD} = \overline{BC} \cdot \cos(B\hat{C}D) \quad \to \quad \cos(B\hat{C}D) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{24}{5}}{6} = \frac{4}{5}.$$



▲ **Figura 2.**

Per l'identità fondamentale della goniometria $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e tenendo conto che l'angolo $B\hat{C}D$ è acuto, risulta:

$$\operatorname{sen} B\hat{C}D = \sqrt{1-\cos^2 B\hat{C}D} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

b2. Primo metodo.

Si osservi la figura 2: i triangoli ABC e EDC sono simili per costruzione. Il loro rapporto di similitudine k può essere calcolato confrontando le misure dei lati proporzionali BC e CD:

$$k = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\frac{24}{5}}{6} = \frac{4}{5}.$$

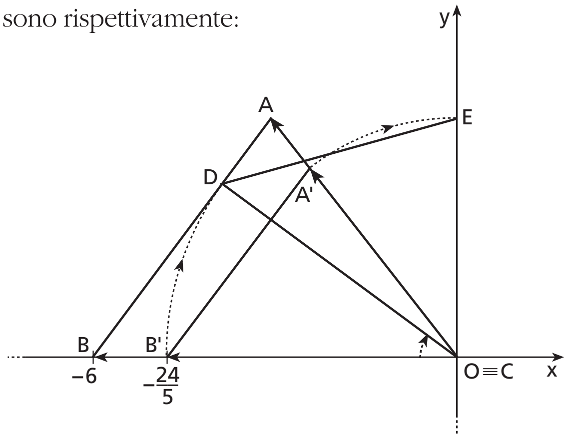
Le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo EDC possono essere determinate tramite la composizione di due trasformazioni: una omotetia di centro O e rapporto $k = \frac{4}{5}$ (figura 3), che trasforma il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C$, congruente al triangolo EDC; una rotazione oraria di centro O e angolo $B\hat{C}D$, che trasforma il triangolo $A'B'C$ nel triangolo EDC.

Le equazioni dell'omotetia e della rotazione stabilite sono rispettivamente:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x \\ y' = \frac{4}{5}y \end{cases},$$

$$\begin{cases} x'' = x'\cos(-B\hat{C}D) - y'\operatorname{sen}(-B\hat{C}D) \\ y'' = x'\operatorname{sen}(-B\hat{C}D) + y'\cos(-B\hat{C}D) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \\ y'' = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases};$$



▲ **Figura 3.**

eseguendo la loro composizione si ottengono le equazioni della similitudine cercata:

$$\begin{cases} x'' = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}y \\ y'' = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y \\ y'' = -\frac{12}{25}x + \frac{16}{25}y \end{cases}.$$

Si nota, come ci si aspettava, che la trasformazione è della forma: $\begin{cases} x'' = mx - ny \\ y'' = nx + my \end{cases}$, cioè una similitudine diretta di rapporto $k = \sqrt{m^2+n^2}$, dove $m = \frac{16}{25}$ e $n = \frac{12}{25}$, per cui

$$k = \left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$, come era richiesto.

Secondo metodo.

Le equazioni di una similitudine sono:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \quad \text{con} \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

con $\sqrt{a^2+b^2} = k$, essendo k il rapporto di similitudine.

Dobbiamo determinare a, b, c, c'. Consideriamo la trasformazione del segmento BC nel segmento DC. Essendo (vedi figura 2):

$$\overline{HC} = \overline{DC} \cos D\hat{C}B = \frac{24}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{96}{25}, \qquad \overline{DH} = \overline{DC} \operatorname{sen} D\hat{C}B = \frac{24}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{72}{25},$$

abbiamo la trasformazione:

$$B(-6; 0) \quad \to \quad D\left(-\frac{96}{25}; \frac{72}{25}\right),$$

$$C(0; 0) \quad \to \quad C(0; 0).$$

Sostituendo nelle equazioni della similitudine, otteniamo:

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = c' \\ -\dfrac{96}{25} = -6a + c & \to \quad a = \dfrac{16}{25} \\ \dfrac{72}{25} = -6b + c' & \to \quad b = -\dfrac{12}{25} \end{cases}$$

Le equazioni della similitudine sono:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{16}{25}x + \dfrac{12}{25}y \\ y' = -\dfrac{12}{25}x + \dfrac{16}{25}y \end{cases} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

