

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2013**

■ **PROBLEMA 2**

Sia f la funzione definita, per tutti gli x positivi, da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e se ne disegni il grafico γ su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy ; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x . Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y , passante per l'origine e tangente a γ in P .
3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0; 1]$. Si calcoli l'area di R , illustrando il ragionamento seguito e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro.
4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse delle y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2013

PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 \ln x$:

- il dominio è $]0; +\infty[$;
- vista la natura del dominio, la funzione non è né pari né dispari;
- poiché $x > 0$, il grafico non interseca l'asse y ; per le intersezioni con l'asse x valutiamo le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 \ln x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ non accettabile} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow P(1; 0);$$

- studiamo il segno della funzione tenendo conto del suo dominio:

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 \ln x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow x > 1,$$

pertanto la funzione è positiva per $x > 1$ ed è negativa per $0 < x < 1$;

- studiamo l'esistenza di eventuali asintoti valutando i limiti agli estremi del dominio:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$

si tratta di una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$, eliminabile applicando De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3 \cdot \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0,$$

il punto $(0; 0)$ è un punto di discontinuità della funzione;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \ln x}{x} = +\infty,$

pertanto non esistono asintoti orizzontali e obliqui;

- determiniamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno, tenendo conto del suo dominio:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3 \ln x + 1),$$

pertanto:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2(3 \ln x + 1) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3 \ln x + 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \\ &\begin{cases} x > 0 \\ x > e^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \rightarrow x > \sqrt[3]{e}, \end{aligned}$$

quindi:

$$- f'(x) > 0 \text{ per } x > \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \rightarrow f(x) \text{ è crescente};$$

$$- f'(x) = 0 \text{ per } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \rightarrow f(x) \text{ ha un punto stazionario;}$$

$$- f'(x) < 0 \text{ per } 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \rightarrow f(x) \text{ è decrescente;}$$

la funzione ha quindi un minimo relativo per $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 0,717$ e il corrispondente punto M sul grafico ha coordinate:

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ y_M = x_M^3 \ln x_M \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 0,717 \\ y_M = -\frac{1}{3e} \approx -0,123 \end{cases};$$

- valutiamo il comportamento della derivata prima nell'intorno destro di 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(3 \ln x + 1)$$

si tratta di una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$, eliminabile applicando De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln x + 1}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{x}}{-2 \cdot \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{3x^2}{2} = 0,$$

la derivata destra del punto $x = 0$ è quindi nulla;

- studiamo la concavità del grafico della funzione studiando il segno della derivata seconda, tenendo conto del dominio della funzione:

$$f''(x) = 2x(3 \ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = 6x \ln x + 5x = x(6 \ln x + 5),$$

pertanto:

$$\begin{cases} x > 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(6 \ln x + 5) > 0 \end{cases} \rightarrow 6 \ln x + 5 > 0 \rightarrow \ln x > -\frac{5}{6} \rightarrow x > \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$$

quindi:

$$- f''(x) > 0 \text{ per } x > \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \rightarrow f(x) \text{ ha concavità rivolta verso l'alto;}$$

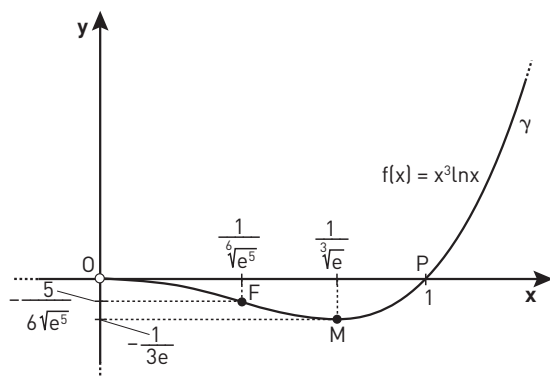
$$- f''(x) = 0 \text{ per } x = \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \rightarrow f(x) \text{ ha un punto di flesso;}$$

$$- f''(x) < 0 \text{ per } 0 < x < \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \rightarrow f(x) \text{ ha concavità rivolta verso il basso;}$$

la funzione ha un flesso per $x = \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \approx 0,435$ e il corrispondente punto F sul grafico ha coordinate:

$$\begin{cases} x_F = \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \\ y_F = x_F^3 \ln x_F \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_F = \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \approx 0,435 \\ y_F = -\frac{5}{6\sqrt[6]{e^5}} \approx -0,068 \end{cases}$$

In figura 4 è rappresentato il grafico γ della funzione $f(x) = x^3 \ln x$.



▲ Figura 4.

2. Una parabola con asse parallelo all'asse y e passante per l'origine ha equazione $y = ax^2 + bx$.
Imponiamo il passaggio per $P(1; 0)$:

$$0 = a + b \rightarrow b = -a.$$

L'equazione della parabola diventa:

$$y = ax^2 - ax$$

Se la conica è tangente a γ in P le derivate delle funzioni corrispondenti devono essere uguali per $x = 1$:

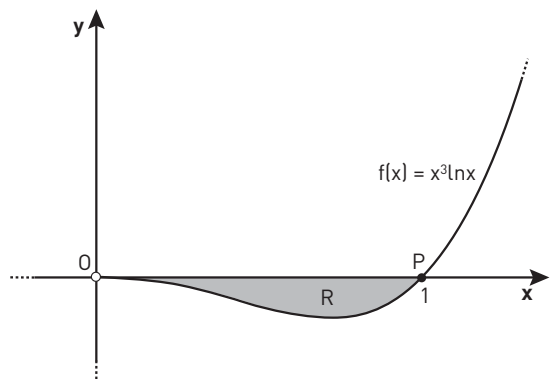
$$y' = 2ax - a \rightarrow y'(1) = 2a - a = a$$

$$f'(x) = x^2(3 \ln x + 1) \rightarrow f'(1) = 1.$$

Pertanto $a = 1$ e la parabola cercata ha equazione $y = x^2 - x$.

3. Poiché la funzione $f(x)$ è non positiva nell'intervallo $]0; 1]$ (figura 5), l'area della regione R delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto si calcola tramite il seguente integrale definito improprio:

$$\mathcal{A}(R) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 -f(t) dt = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 t^3 \ln t dt.$$



▲ Figura 5.

Per semplicità risolviamo l'integrale indefinito $\int t^3 \ln t dt$ mediante l'integrazione per parti:

$$\int t^3 \ln t dt = \frac{t^4}{4} \ln t - \int \frac{t^4}{4} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{t^4}{4} \ln t - \int \frac{t^3}{4} dt = \frac{t^4}{4} \ln t - \frac{t^4}{16} + c.$$

Pertanto $\mathcal{A}(R)$ risulta:

$$\mathcal{A}(R) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 t^3 \ln t \, dt = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{t^4}{4} \ln t - \frac{t^4}{16} \right]_x^1 = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{16} - \frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16} \right).$$

Poiché la forma indeterminata del limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{4} \ln x$ è eliminabile con il teorema di De L'Hôpital e vale

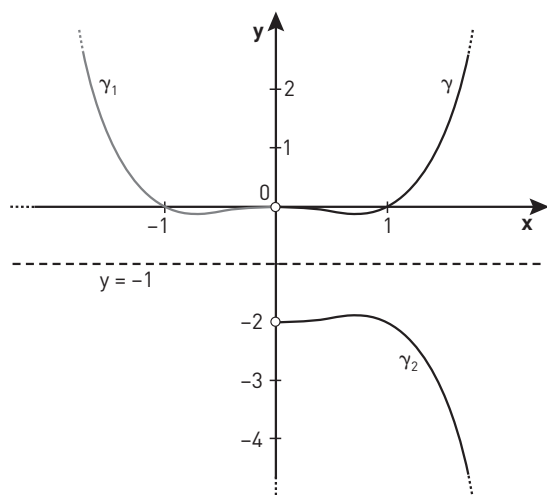
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{4} \ln x = 0, \text{ allora:}$$

$$\mathcal{A}(R) = -\left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16}.$$

Supposta l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro, risulta:

$$\mathcal{A}(R) = \frac{1}{16} \text{ dm}^2 = 0,0625 \text{ dm}^2 = 625 \text{ mm}^2.$$

4. Nella figura 6 sono rappresentati i grafici γ_1 e γ_2 , rispettivamente γ_1 simmetrico di γ rispetto all'asse delle y e γ_2 simmetrico di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.



▲ **Figura 6.**

Determiniamo l'equazione della curva γ_1 applicando alla funzione $y = x^3 \ln x$ le equazioni della simmetria rispetto all'asse y :

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \rightarrow y' = -x'^3 \ln(-x') \rightarrow \gamma_1: y = -x^3 \ln(-x), x < 0.$$

Ricaviamo l'equazione della curva γ_2 applicando alla funzione $y = x^3 \ln x$ le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = -1$:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -2 - y' \end{cases} \rightarrow -2 - y' = x'^3 \ln x' \rightarrow \gamma_2: y = -x^3 \ln x - 2, x > 0.$$