ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico G di f.
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.
4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

PROBLEMA 1

1) Il dominio della funzione f, come tutte le funzioni polinomiali, è l'intero asse reale; f è continua e derivabile e, poiché è somma di soli termini con esponenti dispari, si ha che $f(-x) = -f(x)$, ovvero f è simmetrica rispetto all'origine degli assi.
Poiché f non presenta punti di discontinuità gli unici limiti che ha senso considerare sono quelli per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$.
Come per tutte le parabole cubiche il risultato di tali limiti non può che essere ∞, di cui si deve determinare il segno; esso dipende dal segno del termine di grado massimo che in questo caso vale -3; pertanto c'è un'inversione del segno dell'infinito a cui tende la x con quello a cui tende la funzione; ovvero:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

La f interseca l'asse delle ascisse in $x = 0$, come tutte le funzioni simmetriche rispetto all'origine, e in $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ e risulta positiva per $x < -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee 0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

La derivata prima, $f'(x) = 2 - 9x^2$, è positiva per $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$ e pertanto la f è crescente in tale intervallo con un minimo relativo in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ e un massimo relativo in $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$.

La derivata seconda $f''(x) = -18x$ è positiva per ogni $x < 0$ e pertanto la f ha la concavità verso l'alto in tale intervallo, con un punto di flesso nell'origine; per un disegno accurato del grafico di f è utile calcolare l'inclinazione della tangente nel punto di flesso sostituendo l'ascissa del punto di flesso nella $f'(x)$; si ottiene così $f'(0) = 2$.
Con queste informazioni è possibile disegnare il grafico di f (figura 1).

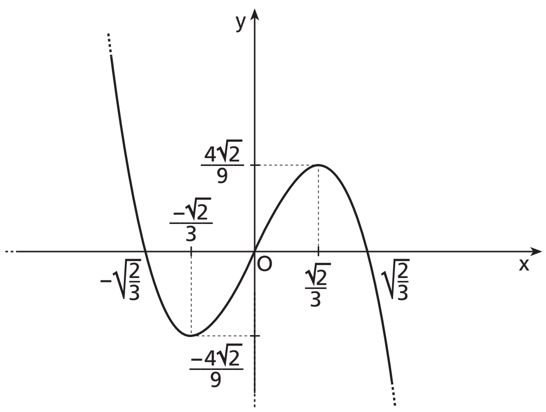

Figura 1.

2)

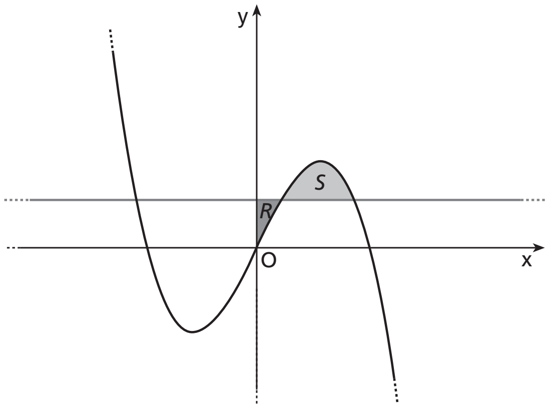

Figura 2.

3) Siano x_1 e x_2 le ascisse dei punti di intersezione della $f(x)$ con la retta $y = c$; tali valori sono due delle soluzioni dell'equazione $2x - 3x^3 = c$ quando c è compresa tra 0 e la y del punto di massimo relativo; poiché questa equazione letterale di terzo grado non è risolubile per via algebrica occorre determinare x_1, x_2 e c ponendo a sistema le informazioni note, ovvero che $f(x_1) = c$, $f(x_2) = c$, e che l'area R, l'integrale della differenza tra la retta e la $f(x)$ calcolato tra 0 e x_1, è uguale all'area S, l'integrale della differenza tra la $f(x)$ e la retta calcolato tra x_1 e x_2, e cioè:

$$\int_0^{x_1} (c - 2x + 3x^3)dx = \int_{x_1}^{x_2} (2x - 3x^3 - c)dx$$

Dopo semplici passaggi si arriva all'equazione: $x_2 \cdot \left(x_2 - \frac{3}{4}x_2^3 - c\right) = 0$ da cui, uguagliando il secondo fattore a zero, si arriva all'equazione da porre nel sistema:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{3}{4}x_2^3 - c = 0 & (1) \\ 2x_2 - 3x_2^3 = c & (2) \\ 2x_1 - 3x_1^3 = c & (3) \end{cases}$$

Ricavando c dalla (1) e sostituendo nella (2) si ottiene un'equazione nella sola incognita x_2, che dopo un raccoglimento diventa un'equazione di secondo grado con due soluzioni $\pm\frac{2}{3}$. A noi interessa solo quella positiva poiché le intersezioni cercate si trovano nel 1° quadrante.

Trovato $x_2 = \frac{2}{3}$ lo si sostituisce nella (1) o nella (2) e si trova $c = \frac{4}{9}$; posto quest'ultimo valore nella (3) si ha un'equazione di terzo grado nell'incognita x_1, che possiamo abbassare di grado dividendo per il binomio $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ poiché sappiano già che $x_2 = \frac{2}{3}$ è soluzione di tale equazione.

Si ottiene così l'equazione: $3x_1^2 + 2x_1 - \frac{2}{3} = 0$ che ha due soluzioni: $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}$ di cui ci interessa solo quella positiva: $x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$.

4) Per determinare la funzione $g(x)$, simmetrica della $f(x)$ rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$, poiché sappiamo che la funzione simmetrica rispetto all'asse delle ascisse si ottiene cambiando il segno alla funzione, occorre

- riferire la $f(x)$ ad un sistema con asse delle ascisse $y = \frac{4}{9}$, ovvero: $f(x) - \frac{4}{9}$
- considerare la funzione opposta: $-\left(f(x) - \frac{4}{9}\right)$
- ritornare a riferire il tutto al sistema di riferimento originale, sommando $\frac{4}{9}$, ovvero:

$$g(x) = -\left(f(x) - \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$$