

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005**  
**Sessione suppletiva**

**10** Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$x' = 2x + my - 1, \quad y' = mx - 2y - 2,$$

dove  $m$  è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005**  
**Sessione suppletiva**

**10** Il sistema della trasformazione geometrica è:

$$\begin{cases} x' = 2x + my - 1 \\ y' = mx - 2y - 2 \end{cases}$$

I punti uniti di una trasformazione sono quei punti che vengono trasformati in sé.

Assunto  $x' = x$  e  $y' = y$ , il sistema diventa:

$$\begin{cases} x = 2x + my - 1 \\ y = mx - 2y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + my - 1 = 0 \\ mx - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti uniti, si procede all'eliminazione del parametro  $m$ :

$$\begin{cases} m = \frac{1-x}{y}, \quad y \neq 0 \\ \frac{1-x}{y}x - 3y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0$$

L'equazione ottenuta,  $x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0$ , con  $y \neq 0$ , è una conica con assi paralleli agli assi cartesiani. Operando il completamento del quadrato, risulta:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad 3y^2 + 2y = 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y\right) = 3\left[\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$$

L'equazione diventa:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{12} \rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{12}} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{7}{36}} = 1.$$

Si tratta di un'ellisse con centro nel punto  $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$  e con semiassi di lunghezza  $\sqrt{\frac{7}{12}}$  e  $\frac{\sqrt{7}}{6}$ .

È necessario discutere la condizione  $y = 0$  per vedere se l'ellisse è privata di qualche punto:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto  $(0; 0)$  non appartiene al luogo  $\begin{cases} x + my - 1 = 0 \\ mx - 3y - 2 = 0 \end{cases}$  poiché, sostituendo, si trova il sistema impossi-

le:  $\begin{cases} -1 = 0 \\ -2 = 0 \end{cases}$ .

Mentre per  $(1; 0)$  si ha  $\begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ m - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow m = 2$ , che è un valore accettabile per il parametro  $m$ .

In conclusione il luogo dei punti uniti della trasformazione geometrica è l'ellisse di equazione

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{12}} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{7}{36}} = 1,$$

privata del punto  $O(0; 0)$ .