3 Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.

3 Si stabilisce di considerare il centro dell'omotetia nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Dati un numero reale $k \neq 0$ e un punto P del piano, l'omotetia di rapporto k e centro O è quella trasformazione che associa a P il punto P' tale che $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$. Il punto P' è detto omotetico di P e il numero k è detto rapporto di omotetia. L'equazione di un'omotetia di centro O e rapporto k è:

$$\omega_{O,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

Inoltre un gruppo è una struttura algebrica $(A, *)$ nella quale l'operazione $*$ gode delle seguenti proprietà:

a) è interna:

$a * b \in A, \ \forall a, \ b \in A;$

b) è associativa:

$(a * b) * c = a * (b * c), \ \forall a, \ b \in A;$

c) esiste, ed appartiene ad A, l'elemento neutro e:

$a * e = e * a = a, \ \forall a \in A;$

d) per ogni elemento $a \in A$ esiste in a l'elemento simmetrico a':

$\forall a \in A, \exists a' \in A$ tale che $a * a' = a' * a = e.$

L'insieme delle omotetie con l'operazione di composizione $\circ$ è un gruppo in quanto possiamo verificare le quattro proprietà suddette.

a) La composizione di omotetie di centro O è un'operazione interna perché, se

$$\omega_{O,k_1} = \begin{cases} x' = k_1 x \\ y' = k_1 y \end{cases} \text{ e } \omega_{O,k_2} = \begin{cases} x' = k_2 x \\ y' = k_2 y \end{cases} \quad (k_1, \ k_2 \in \mathbb{R} - \{0\})$$

sono le equazioni delle due omotetie, si avrà

$$\omega_{O,k_1} \circ \omega_{O,k_2} = \begin{cases} x' = (k_1 \cdot k_2)x \\ y' = (k_1 \cdot k_2)y \end{cases}$$

che è ancora un'omotetia di centro O e rapporto $k_1 \cdot k_2$.

b) Vale la proprietà associativa:

$$(\omega_{O,k_1} \circ \omega_{O,k_2}) \circ \omega_{O,k_3} = \omega_{O,k_1} \circ (\omega_{O,k_2} \circ \omega_{O,k_3}).$$

Infatti, prese le trasformazioni ω_{O,k_1} e ω_{O,k_2} definite sopra, e indicando

$$\omega_{O,k_3} = \begin{cases} x' = k_3 x \\ y' = k_3 y \end{cases} \quad (k_3 \in \mathbb{R} - \{0\})$$

si ottiene

$$(\omega_{O,k_1} \circ \omega_{O,k_2}) \circ \omega_{O,k_3} = \begin{cases} x' = ((k_1 \cdot k_2) \cdot k_3)x \\ y' = ((k_1 \cdot k_2) \cdot k_3)y \end{cases}$$

e

$$\omega_{O,k_1} \circ (\omega_{O,k_2} \circ \omega_{O,k_3}) = \begin{cases} x' = (k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3))x \\ y' = (k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3))y \end{cases}$$

Poiché l'insieme dei numeri reali con l'operazione di prodotto gode della proprietà associativa, sarà $k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3) = (k_1 \cdot k_2) \cdot k_3$.

c) Esiste l'elemento neutro: infatti l'omotetia di centro O e rapporto $k = 1$ funge da elemento neutro rispetto all'operazione di composizione. Consideriamo una generica omotetia di centro O e rapporto k

$$\omega_{O,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

e l'omotetia di centro O e rapporto 1

$$\omega_{O,1} = \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Si può verificare che

$$\omega_{O,k} \circ \omega_{O,1} = \omega_{O,1} \circ \omega_{O,k}.$$

d) Per ogni omotetia di centro O e rapporto k, $\omega_{O,k}$, siccome k è un numero reale non nullo per definizione di omotetia, esiste l'omotetia di centro O e rapporto $\frac{1}{k}$, $\omega_{O,\frac{1}{k}}$, che funge da elemento simmetrico di $\omega_{O,k}$. Indichiamo le trasformazioni con

$$\omega_{O,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \text{ e } \omega_{O,\frac{1}{k}} = \begin{cases} x' = \dfrac{1}{k}x \\ y' = \dfrac{1}{k}y \end{cases}$$

Si verifica che

$$\omega_{O,k} \circ \omega_{O,\frac{1}{k}} = \omega_{O,\frac{1}{k}} \circ \omega_{O,k} = \omega_{O,1}.$$