

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005  
Sessione straordinaria**

■ **PROBLEMA 2**

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate le curve di equazione:

$$[1] \quad y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c.$$

- a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse  $y$ , hanno tangente parallela all'asse  $x$ .
- b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti  $a$ ,  $b$  affinché la curva [1] volga la concavità verso le  $y$  positive in tutto il suo dominio.
- c) Determinare i coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse  $y$ , un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate  $(2; 2)$ .
- d) Dopo aver verificato che la curva  $K$  presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da  $K$  e dalle due tangenti inflessionali.
- e) Determinare le equazioni della traslazione che, lasciando sull'asse  $y$  il flesso di  $K$  con tangente orizzontale, porti il minimo di  $K$  sull'asse  $x$ .

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005**  
**Sessione straordinaria**

**PROBLEMA 2**

a) Le curve di equazione  $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$  sono funzioni polinomiali continue e derivabili nell'insieme dei numeri reali. Le derivate prime hanno forma:  $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$  e, per definizione di derivata, esse si annullano nei punti in cui la tangente è parallela all'asse  $x$ . Pertanto, ponendo  $f'(x)=0$ , si ottiene  $4x^3+3ax^2+2bx=0$  che ha soluzioni  $x=0$  e  $x=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-32b}}{8}$ . Si conclude che nel punto  $x=0$ , in cui ogni curva secca l'asse  $y$ , le curve [1] hanno tangente parallela all'asse  $x$ .

b) Data una funzione con derivata prima e seconda continue in un intervallo, condizione sufficiente affinché essa rivolga la concavità verso l'alto in un punto  $x_0$ , interno all'intervallo, è che la derivata seconda in quel punto sia positiva. Se  $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$ , la derivata prima è  $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$  e la derivata seconda ha espressione:  $f''(x)=12x^2+6ax+2b$ . Posto  $f''(x)>0$ , risulta:

$$12x^2+6ax+2b>0 \quad \rightarrow \quad 6x^2+3ax+b>0.$$

L'equazione associata,  $6x^2+3ax+b=0$ , ammette soluzioni reali  $x=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-24b}}{12}$ , con  $\Delta=9a^2-24b\geq 0$ .

Pertanto la disequazione è sempre verificata nel campo reale se il discriminante  $\Delta$  è negativo. La funzione rivolge la concavità verso l'alto su tutto  $\mathbb{R}$  se vale la seguente relazione tra  $a$  e  $b$ :

$$9a^2-24b<0 \quad \rightarrow \quad 3a^2-8b<0.$$

La condizione è sufficiente e può non contemplare altri casi in cui la funzione ha concavità verso l'alto su tutto il campo reale. È infatti necessario discutere il segno della derivata prima e della derivata seconda, in relazione al discriminante  $\Delta$ .

Se  $\Delta>0$ , cioè  $3a^2-8b>0$ , la derivata seconda è negativa in un intervallo. In esso la funzione ha concavità rivolta verso il basso. Pertanto, per  $3a^2-8b>0$ , la curva non mantiene la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza.

Se  $\Delta=0$ , cioè  $3a^2=8b$ , la derivata seconda è positiva per  $x\neq-\frac{a}{4}$  e nulla per  $x=-\frac{a}{4}$ . La derivata prima,  $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$ , diventa  $f'(x)=x\left(4x^2+3ax+\frac{3}{4}a^2\right)$ : essa è negativa per  $x<0$ , nulla per  $x=0$ , positiva per  $x>0$ . Pertanto la funzione ha un minimo in  $x=0$  e non possiede flessi: essa presenta concavità verso l'alto in  $\mathbb{R}$ .

In conclusione, la curva  $y=x^4+ax^3+bx^2+c$  rivolge la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza  $\mathbb{R}$  se  $a$  e  $b$  soddisfano la relazione:  $3a^2-8b\leq 0$ .

c) Nella soluzione del punto a) si è trovato che la curva parametrica ha tangente orizzontale nel punto  $x=0$ , ovvero nel punto del grafico di coordinate  $(0; c)$ . Affinché vi sia un flesso, è necessario che la derivata seconda  $f''(x)=12x^2+6ax+2b$  si annulli per  $x=0$  cioè  $f''(0)=0$ . Risulta quindi:

$$f''(0)=2b=0 \quad \rightarrow \quad b=0.$$

Se la tangente orizzontale inflessionale in  $(0; c)$  interseca la curva in un ulteriore punto,  $(2; 2)$ , si deduce che  $c=2$ .

Infine, poiché la curva passa per il punto  $(2; 2)$  deve valere  $2=f(2)$ , cioè:

$$2=2^4+a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c \quad \rightarrow \quad 8a+4b+c=-14.$$

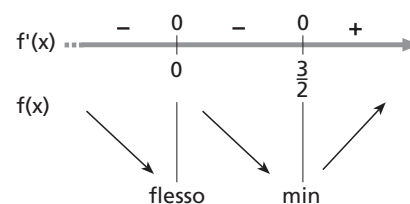
Si pongono a sistema le relazioni trovate:

$$\begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ 8a+4b+c=-14 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ a=-2 \end{cases}.$$

La curva ha equazione:  $y=x^4-2x^3+2$ .

d) Si studia la curva  $K$  di equazione  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$  per rappresentarla in un sistema cartesiano. Il campo di esistenza è quello dei numeri reali e si ha:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ . Per le considerazioni precedenti, essa interseca l'asse  $y$  nel punto  $A(0; 2)$ , dove ha un flesso orizzontale con tangente inflessionale di equazione  $t_1: y = 2$ . La derivata prima è  $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$  e la tabella del suo segno è riportata nella figura 4.

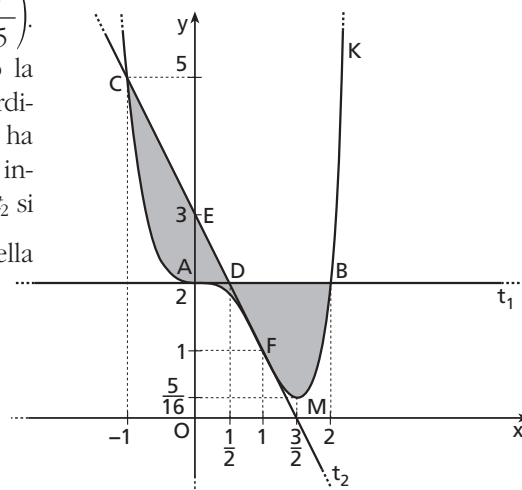
▼ Figura 4.



La curva ha un minimo assoluto di coordinate  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$ .

La derivata seconda vale  $f''(x) = 12x^2 - 12x$ , pertanto la funzione ha un ulteriore flesso nel punto  $x = 1$ , di coordinate  $F(1; 1)$ . La corrispondente tangente inflessionale ha equazione  $t_2: y - 1 = f'(1)(x - 1)$  cioè  $y = -2x + 3$ . Essa interseca la curva anche nel punto  $C(-1; 5)$ . Le rette  $t_1$  e  $t_2$  si intersecano in un punto  $D$  di coordinate  $D\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ . Nella

figura 5 è tracciata la curva, le tangenti inflessionali e la regione compresa tra esse.



► Figura 5.

La regione finita di piano è formata dal triangolo  $ADE$  e da due figure mistilinee  $CAE$  e  $AFMB$ , di superficie rispettivamente  $S_{ADE}$ ,  $S_{CAE}$  e  $S_{AFMB}$ . Esse si calcolano per via geometrica e per via integrale nel modo seguente:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AE} \rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4};$$

$$S_{CAE} = \int_{-1}^0 (-2x + 3 - x^4 + 2x^3 - 2) dx = \left[ -x^2 + x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right]_{-1}^0 = \frac{13}{10};$$

$$S_{AFMB} = \int_0^2 (2 - x^4 + 2x^3 - 2) dx = \left[ -\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right]_0^2 = \frac{8}{5}.$$

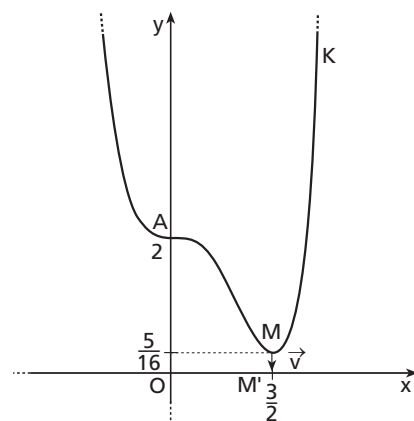
L'area  $S$  della regione finita di piano delimitata dalla curva  $K$  e dalle tangenti inflessionali vale:

$$S = S_{ADE} + S_{CAE} + S_{AFMB} \rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{13}{10} + \frac{8}{5} = \frac{63}{20}.$$

e) Tenendo conto che il flesso  $A(0; 2)$  deve rimanere sull'asse  $y$ , il vettore di traslazione  $\vec{v}(a; b)$  ha componente orizzontale nulla ovvero  $a=0$  e la traslazione è verticale. Inoltre, se il minimo  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$  ha il suo trasformato sull'asse  $x$ ,  $M'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$  (figura 6), la componente verticale  $b$  di  $\vec{v}$  deve valere  $-\frac{5}{16}$ .

Pertanto il vettore di traslazione è  $\vec{v}\left(0; -\frac{5}{16}\right)$  e le corrispondenti equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \frac{5}{16} \end{cases}.$$



▲ Figura 6.