

■ **PROBLEMA 1**

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A , una retta r passante per O , il punto B , ulteriore intersezione di r con γ , il punto C intersezione di r con t .

La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P . Al variare di r , P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proposizioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

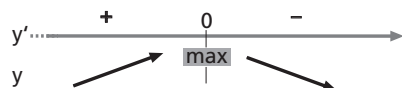
ove D è la proiezione ortogonale di B su OA .

2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometri-

che Oxy , l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$;

3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ .

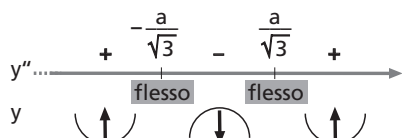
Il punto $A(0; a)$ è un punto di massimo (figura 2).



◀ Figura 2.

$$y'' = \frac{2a^3(3x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^3} > 0, \text{ per } x < -\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ e per } x > \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

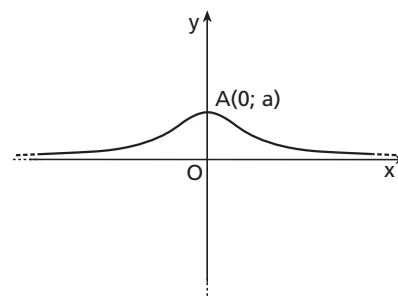
La concavità ha l'andamento di figura 3.



◀ Figura 3.

Si hanno due punti di flesso: $F_1\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}a\right)$ e $F_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}a\right)$.

In definitiva il grafico è quello rappresentato in figura 4.



▲ Figura 4.

L'area del cerchio γ è $\pi \cdot \frac{a^2}{4}$

L'area compresa tra Γ e l'asintoto $y=0$ si ottiene da: $2 \int_0^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = 2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{a}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx$, ponendo

do $t = \frac{x}{a}$, si ottiene $2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[a^2 \cdot \arctg\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^k = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$, quindi è pari a quattro volte quella del cerchio γ .