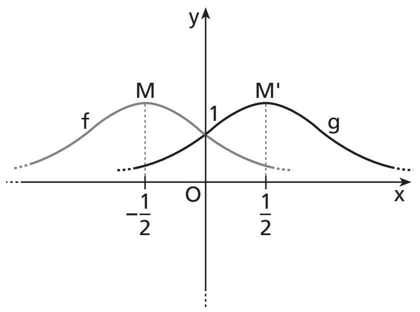
10 Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, determina una simmetria assiale e una traslazione del piano che diano come immagine di f la funzione $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$.

10 Eseguiamo uno studio sommario delle due funzioni.
L'asse x è asintoto orizzontale per entrambe le funzioni. Inoltre:

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}, \quad g'(x) = -\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Ora tracciamo il grafico approssimato.



◀ **Figura 9.**

Con l'aiuto del grafico riconosciamo che la simmetria assiale che trasforma la funzione f nella g è quella rispetto all'asse y:

$$\sigma: (x;\, y) \to (x';\, y') = (-x;\, y) \to y = \frac{1}{(-x)^2 + (-x) + 1} = \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

Sempre con l'osservazione del grafico vediamo che la traslazione cercata può essere individuata mediante il vettore $\overrightarrow{MM'}$, dove M è il punto di massimo della f, M' quello di g.

$$f'(x) = 0 \to x = -\frac{1}{2}; \quad g'(x) = 0 \to x = \frac{1}{2}.$$

Il vettore di traslazione e le corrispondenti equazioni sono:

$$\overrightarrow{MM'} = (1; 0), \quad \tau: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \end{cases}.$$

Si può procedere anche partendo direttamente dalla traslazione:

$$\tau: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}.$$

Sostituiamo nell'espressione della f e confrontiamo l'espressione ottenuta con quella della g:

$$f \to y' - b = \frac{1}{(x'-a)^2 + (x'-a) + 1}, \quad g \to y' = \frac{1}{x'^2 - x' + 1}.$$

Le due espressioni coincidono se:

$$\begin{cases} (x'-a)^2 + (x'-a) + 1 = x'^2 - x' + 1 \\ y' - b = y' \end{cases} \to \begin{cases} (x'^2 + (-2a+1)\,x' + a^2 - a = x'^2 - x' \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + 1 = -1 \\ a^2 - a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$