

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

■ **PROBLEMA 1**

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali a un numero reale a non nullo.

Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y) :

- a) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a ;
- b) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x, y)$ che soddisfano al problema;
- c) si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
- d) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
- e) si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

■ **PROBLEMA 1**

a) Tenendo conto che il parametro a non è nullo, le relazioni assegnate dal testo sono:

$$x + y = a \text{ e } \frac{x}{y} = a, \text{ con } x, y \neq 0.$$

$x + y = a \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$ è l'equazione di un fascio improprio di rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante esclusa la retta $y = x$, perché $a \neq 0$.

$\frac{x}{y} = a \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$ cioè $y = \frac{1}{a}x \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$ rappresenta un fascio proprio di rette con centro $(0; 0)$, esclusi il punto $(0; 0)$ stesso e gli assi cartesiani.

Per quanto detto, confrontando le due equazioni, si deduce che le rette che rappresentano non coincidono per nessun valore di $a \neq 0$, mentre sono parallele per $a = -1$.

Pertanto per $a \neq 0 \wedge a \neq -1$, esse si intersecano in un solo punto.

Si può arrivare alle stesse conclusioni valutando il sistema:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - ay = 0 \end{cases}, \text{ con } a \neq 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

Con il metodo di Cramer si trova $\Delta = -a - 1$, $\Delta_x = -a^2$, $\Delta_y = -a$. Quindi se $a = -1$ non ci sono solu-

zioni; se $a \neq -1$ esiste la soluzione
$$\begin{cases} x = \frac{a^2}{a+1} \\ y = \frac{a}{a+1} \end{cases}.$$

b) Dal sistema $\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = a \end{cases}$, con $a \neq 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$, eliminando a , segue l'equazione cartesiana del luogo

γ in forma implicita:

$$x + y = \frac{x}{y} \rightarrow y^2 + xy - x = 0.$$

c) Le equazioni della simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante sono:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}. \text{ La trasformata dell'equazione } x = y^2 + xy - x = 0, y \neq 1 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \text{ diventa: } x^2 + xy - y = 0,$$

ossia in forma esplicita

$$\gamma' : y = \frac{x^2}{1-x}, \quad x \neq 1 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

Si sceglie di studiare dettagliatamente γ' in modo da costruire il grafico di γ per simmetria. Si indichi per comodità con f la funzione della curva γ' .

Il campo di esistenza f è $x \neq 1 \wedge x \neq 0$. La funzione non è né pari né dispari. L'intersezione di $y = \frac{x^2}{1-x}$ con gli assi cartesiani è $(0; 0)$ non accettabile per le C.E.. La funzione è positiva per $x < 1 \wedge x \neq 0$, è nega-

tiva per $x > 1$. I limiti agli estremi del campo di esistenza valgono: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-x} = 0$, quindi $x=0$ è un

punto di discontinuità di terza specie;

$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2}{1-x} = \mp \infty$, $x=1$ è un asintoto verticale;

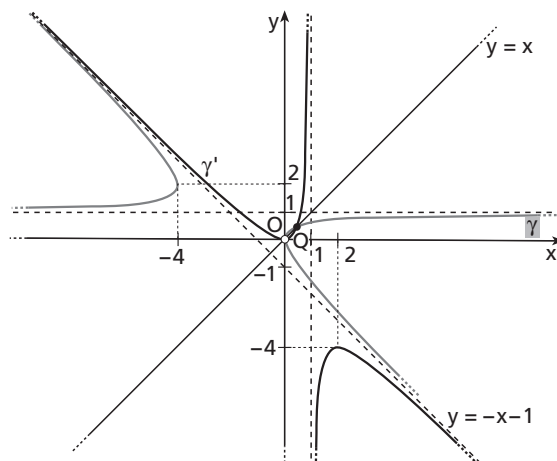
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1-x} = \mp \infty$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-x^2} = -1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x \right) = -1$, pertanto la funzione ha asintoto obliquo $y = -x - 1$.

Lo studio del segno della derivata prima

$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ implica che la funzione avrebbe un minimo in $x=0$, se tale punto non fosse escluso dal campo di esistenza, e ha un massimo in $(2; -4)$. Valutando il segno della derivata seconda

da $f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$ si deduce che la concavità è rivolta verso l'alto per $x < 1$, verso il basso per $x > 1$. Nella figura 1 sono tracciati i grafici di f e della sua simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



▲ Figura 1.

- d) Poiché γ e γ' sono due curve simmetriche rispetto alla retta $y=x$, esse devono intersecarsi in punti appartenenti alla retta stessa. Pertanto si determinano tali punti ponendo a sistema l'equazione della curva γ' e l'equazione della bisettrice:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{1-x} \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

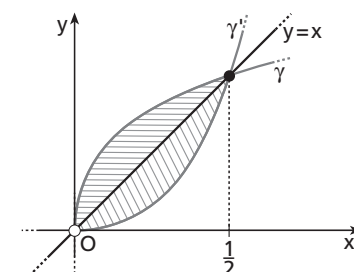
I due punti comuni a γ e γ' sono $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $O(0,0)$.

Grazie alla simmetria, il calcolo dell'area S , compresa tra le curve γ e γ' , si riconduce al calcolo della superficie compresa tra γ' e la retta $y=x$, raddoppiandone poi il risultato.

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{x^2-1+1}{x-1} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = 2 \left[x^2 + x + \ln|x-1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Si può determinare la superficie S per via numerica calcolando l'integrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx$ attraverso il metodo dei trapezi. Si divide l'intervallo $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ in 10 parti uguali e si compila la corrispondente tabella.

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|---|--------|--------|--------|------|--------|--------|--------|--------|---------|-----|
| x | 0 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,5 |
| $x - \frac{x^2}{1-x}$ | 0 | 0,0474 | 0,0889 | 0,1235 | 0,15 | 0,1667 | 0,1714 | 0,1615 | 0,1333 | 0,08182 | 0 |



▲ Figura 2.

Per la formula dei trapezi vale:

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx \approx 2 \frac{\frac{1}{2} - 0}{10} \left(\frac{0+0}{2} + 0,0474 + 0,0889 + \dots + 0,0818 \right) = 0,112452.$$

Si osserva che l'integrale esatto ha valore $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$ che, determinato con la calcolatrice, risulta uguale a 0,1137... .

Pertanto il valore approssimato ottenuto con il metodo dei trapezi è certo fino alla cifra dei centesimi.

e) Se $x = 1$, la relazione $x + y = \frac{x}{y}$ diventa $1 + y = \frac{1}{y}$ cioè $y^2 + y - 1 = 0$. Ricavando y si trova: $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Si osserva che la relazione $1 + y = \frac{1}{y}$ può essere scritta in forma di proporzione cioè $1 : y = (1 + y) : 1$.

Applicando la proprietà dello scomporre si ottiene $(1 - y) : y = y : 1$ dove y rappresenta il medio proporzionale fra 1 e quanto rimane togliendo la stessa quantità da 1. La soluzione positiva

$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ rappresenta, per definizione, la parte aurea dell'unità, mentre, il numero 1 è la parte aurea di $\left| \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right|$ che è il valore assoluto della soluzione negativa.