

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione suppletiva**

- 8** In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2 \end{cases}$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $(1, 0)$ nel punto $(1, -1)$ e stabilire se ammette rette unite.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione suppletiva

8 Sostituendo le coordinate (x, y) con $(1, 0)$ e le coordinate (X, Y) con $(1, -1)$ nelle equazioni dell'affinità:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2 \end{cases}$$

otteniamo: $\begin{cases} 1 = a \\ -1 = \frac{1}{2}b - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$

L'affinità richiesta è quindi: $\begin{cases} X = x + 2y \\ Y = x - 2 \end{cases}.$

Per verificare se ammette rette unite scriviamo le equazioni della trasformazione inversa:

$$\begin{cases} x = Y + 2 \\ 2y = X - Y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = Y + 2 \\ y = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y - 1 \end{cases}.$$

Con queste equazioni trasformiamo la retta generica $y = mx + q$. Si ha:

$$\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y - 1 = m(Y + 2) + q \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2m+1}X - \frac{2q}{2m+1} - 2.$$

L'affinità data ammette rette unite se:

$$\begin{cases} m = \frac{1}{2m+1} \\ q = -\frac{2q}{2m+1} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 1 = 0 \\ q = -\frac{4m+2}{2m+3} \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ottiene: $m = -1$ v $m = \frac{1}{2}$. Sostituendo nella seconda equazione si ottengono le

seguenti coppie di valori per m e q : $\begin{cases} m = -1 \\ q = 2 \end{cases}$ v $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ q = -1 \end{cases}.$

Le equazioni delle due rette unite sono quindi: $y = -x + 2$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Cerchiamo eventuali rette unite, parallele all'asse y , di equazione $x = b$. La retta $x = b$ viene trasformata nella retta $Y = b - 2$ che è parallela all'asse delle ascisse, quindi diversa dalla retta originale.

La trasformazione ha quindi solo due rette unite.